Богомолова Ольга Борисовна,
Усенков Дмитрий Юрьевич

КОМБИНАТОРИКА НА СЛОВАХ – ЗАДАЧИ № 10

Задание под номером 10 в ЕГЭ по информатике имеет две основные модификации. Одна из них посвящена использованию недесятичных систем счисления, другая затрагивает знания по комбинаторике.

Задача 1. Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 5 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {Б, А, Й, Т}. При этом буква Б в каждом слове может использоваться ***ровно 1 раз***, а остальные буквы могут встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов? (Учитываются только различающиеся слова.)

Решение

1. В этой задаче точно известно, что указанная буква используется указанное число раз. Поэтому можно начать с перебора «вручную» всех возможных вариантов расположения в слове этой буквы, обозначая остальные неизвестные буквы звездочкой («*»).

Б****, *Б***, **Б**, ***Б*, ****Б

2. Теперь разбираемся с остальными четырьмя знаковыми позициями. Поскольку буква Б может (по условию) использоваться в слове ***только один раз***, и мы ее уже использовали, в каждом из вышеперечисленных вариантов в каждой из четырех знаковых позиций могут встречаться (или не встречаться) ***три оставшиеся буквы*** – А, Й или Т.

Б	$\underbrace{*}_{\{А, Й, Т\}}$	$\underbrace{*}_{\{А, Й, Т\}}$	$\underbrace{*}_{\{А, Й, Т\}}$	$\underbrace{*}_{\{А, Й, Т\}}$
Кол-во комбинаций:	3	3	3	3

Составим таблицу для расчета количества комбинаций для каждого из вышеуказанных вариантов:

Варианты	Количества комбинаций
Б****	1*3*3*3*3 = 81
*Б***	3*1*3*3*3 = 81
Б	3*3*1*3*3 = 81
***Б*	3*3*3*1*3 = 81
****Б	3*3*3*3*1 = 81

3. Тогда общее количество слов, которые можно составить по указанным в условии правилам, равно 5 * 81 = 405.

Ответ: 405.

Задача 2. Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 5 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {Б, А, Й, Т}. При этом буква Б в каждом слове должна использоваться ***хотя бы один раз***, а остальные буквы могут встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов? (Учитываются только различающиеся слова.)

Решение

В предыдущей задаче буква Б могла использоваться ровно один раз. А в этой задаче она должна использоваться хотя бы один раз. В чем различие?

1. На первом этапе решения мы должны, как и в предыдущей задаче, определить количество вариантов размещения одной буквы Б:

Б****, *Б***, **Б**, ***Б*, ****Б

2. Но в отличие от предыдущей задачи, теперь эта буква Б может быть не единственной. Поэтому вместо каждой из звездочек может быть любая из четырех возможных букв. Но нужно учесть, что при этом комбинации могут повторяться – например, во втором варианте (*Б***) на первом знакоместе буква Б у нас уже побывала, когда мы рассматривали первый вариант (Б****).

Поэтому вместо звездочек, располагающихся ***справа*** от уже имеющейся буквы Б, можно размещать ***все четыре*** возможные буквы, а вместо звездочек ***слева*** от буквы Б – ***только три буквы (кроме буквы Б)***.

Выполним подсчеты в виде таблицы:

Варианты	Количество комбинаций
Б****	1*4*4*4*4 = 256
*Б***	3*1*4*4*4 = 192
Б	3*3*1*4*4 = 144
***Б*	3*3*3*1*4 = 108
****Б	3*3*3*3*1 = 81

3. Общее число вариантов: 256 + 192 + + 144 + 108 + 81 = 781.

Ответ: 781.

Задача 3. Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 6 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {Б, А, Й, Т}. При этом буква Б в каждом слове может использоваться ***ровно 2 раза***, а остальные буквы могут встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов? (Учитываются только различающиеся слова.)

Решение

1. Аналогично предыдущим задачам, сначала выстраиваем все варианты расположения буквы Б.

> Удобнее всего формировать возможные комбинации размещения нескольких букв следующим образом:
>
> – размещаем «первую» букву Б на первой позиции слова, а затем перебираем все возможные варианты расположения «второй» буквы Б ***правее*** «первой»,
>
> – перемещаем «первую» букву Б на следующую позиции слова, а затем перебираем все возможные варианты расположения «второй» буквы Б ***правее*** «первой» и т. д.

ББ****, Б*Б***, Б**Б**, Б***Б*, Б****Б,
*ББ***, *Б*Б**, *Б**Б*, *Б***Б
ББ, **Б*Б*, **Б**Б,
***ББ*, ***Б*Б,
****ББ

Всего 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15 вариантов.

2. В каждом из перечисленных вариантов ищем количество всех возможных комбинаций оставшихся трех букв в четырех знаковых позициях:

Варианты	Количество комбинаций
ББ****	1*1*3*3*3*3 = 81
Б*Б***	1*3*1*3*3*3 = 81
Б**Б**	1*3*3*1*3*3 = 81
Б***Б*	1*3*3*3*1*3 = 81
Б****Б	1*3*3*3*3*1 = 81

*ББ***	3*1*1*3*3*3 = 81
*Б*Б**	3*1*3*1*3*3 = 81
*Б**Б*	3*1*3*3*1*3 = 81
*Б***Б	3*1*3*3*3*1 = 81
ББ	3*3*1*1*3*3 = 81

3. Общее количество слов, которые можно составить по указанным в условии правилам, равно 15 * 81 = 1215.

Ответ: 1215.

Задача 4. Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 6 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {Б, А, Й, Т}. При этом буква Б в каждом слове может использоваться ***не более 2 раз***, а остальные буквы могут встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов? (Учитываются только различающиеся слова.)

Решение

Аналогично предыдущей задаче, сначала определяем все возможные варианты размещения «обязательной» буквы Б, но теперь условие «не более 2 раз» указывает, что в слове может быть одна или две буквы Б, а может быть и ни одной, и нужно по отдельности рассматривать все эти случаи.

1.1. Одна буква Б:

Б*****, *Б****, **Б***, ***Б**, ****Б*, *****Б

Всего 6 вариантов.

1.2. Остальные буквы дают 3*3*3*3*3 = = 243 комбинации. Итого 6 * 243 = 1458.

2.1. Две буквы Б:

ББ****, Б*Б***, Б**Б**, Б***Б*, Б****Б,
*ББ***, *Б*Б**, *Б**Б*, *Б***Б
ББ, **Б*Б*, **Б**Б,
***ББ*, ***Б*Б,
****ББ

Всего 15 вариантов.

2.2. Остальные буквы дают 3*3*3*3 = 81 комбинации. Итого 15 * 81 = 1215.

3. Без букв Б: требуется просто подсчитать все возможные 6-буквенные комбинации из трех букв. Их 3*3*3*3*3*3 = 729 комбинаций.

4. Всего, таким образом, возможно 1215 + 1458 + 729 = 3402 комбинации.

Ответ: 3402.

Если бы условие задачи имело вид:

Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 6 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {Б, А, Й, Т}. При этом буква Б в каждом слове может использоваться не более 4 раз, а остальные буквы могут встречаться в слове любое количество раз или не встречаться совсем. Сколько существует таких слов?

то проще было бы выполнить решение иначе:

1) вычислить общее количество всех возможных шестибуквенных слов, составленных из всех возможных букв: 4*4*4*4*4*4 = 4096;

2) вычислить количество не подходящих по условию вариантов, в которых буква Б встречается более 4 раз – то есть или 5 раз, или 6 раз:

БББББ*, ББББ*Б, БББ*ББ, ББ*БББ, Б*ББББ, *БББББ, ББББББ

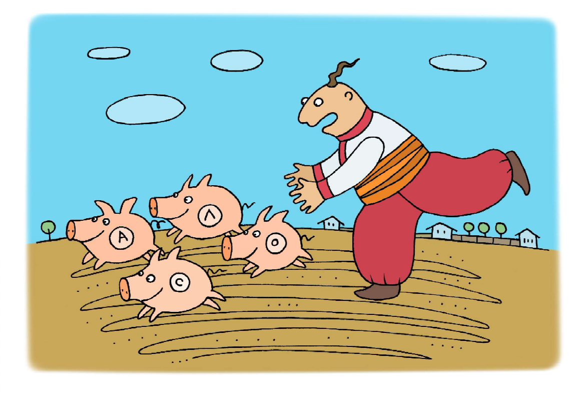
всего – 19 вариантов;

3) вычесть из общего количества возможных вариантов количество неподходящих: 4096 – 19 = 4077.

Ответ: 4077.

Выбираемый метод решения зависит от того, какое количество вариантов меньше – «подходящих» по условию или «не подходящих».

Задача 5. Составляются все возможные слова (не обязательно осмысленные) из 5 букв, при этом могут использоваться только буквы из набора {С, А, Л, О}. При этом слова обязательно начинаются и заканчиваются гласной буквой, а остальные буквы слова могут быть любыми – как согласными, так и гласными. Сколько существует таких слов? (Учитываются только различающиеся слова.)



Решение

1. Сначала определяем количество вариантов с известным по условию размещением букв – первая и последняя буква слова должна быть гласная. Гласных букв в имеющемся наборе две – А и О. Значит, возможны следующие варианты (остальные буквы, как и раньше, обозначаем звездочкой).

А***А, А***О, О***А, О***О

2. Остальные буквы, по условию, могут быть любыми – и гласными, и согласными, то есть здесь уже рассмотренные гласные буквы О и А могут быть использованы повторно.

Варианты	**Количество комбинаций**
А***А	1*4*4*4*1 = 64
А***О	1*4*4*4*1 = 64
О***А	1*4*4*4*1 = 64
О***О	1*4*4*4*1 = 64

3. Тогда всего возможно слов 4 * 64 = = 256.

Ответ: 256.

Можно было бы составить таблицу и по-другому, сведя всё к только одному варианту:

Варианты	**Количество комбинаций**
$(^{А}/_{О})***(^{А}/_{О})$	2*4*4*4*2 = 256

Тогда ответ будет получен сразу же.

Задача 6. Все шестибуквенные слова, составленные из букв Р, О, М, А, Н, записаны в указанном порядке:

ОООООО
ОООООР
ОООООМ
ОООООН
ОООООА
ООООРО
…

1) какое слово стоит в списке на 235-м месте от его начала?

2) на каком месте от начала списка стоит слово ОМАРОН?

Решение

Если рассмотреть приведенный выше список слов, то легко заметить его аналогию с последовательностью шестизначных чисел в пятеричной системе счисления:

ОООООО	000000
ОООООР	000001
ОООООМ	000002
ОООООН	000003
ОООООА	000004
ООООРО	000010

если считать, что цифра 0 обозначена буквой О, цифра 1 – буквой Р, 2 – М, 3 – Н, 4 – А.

1) Чтобы выяснить, какое слово стоит в списке на 235-м месте от его начала, надо сначала выяснить, какое пятеричное число расположено в списке на 235 месте.

• Если на 1-м месте списка стоит нуль, то получается, что n-му месту списка соответствует число n – 1 (номер места в списке – десятичный, число – тоже десятичное). Тогда искомому 235-му месту списка соответствует десятичное число 234.

• Десятичное число 234 в пятеричной системе записывается как 1414_5. Но из такого числа можно получить только четырехбуквенное слово, а нам требуется шестибуквенное! Поэтому для получения шестизначного пятеричного числа дополняем его двумя незначащими нулями слева: 001414_5.

• Переписываем полученное пятеричное число, заменяя цифры соответствующими буквами: ООРАРА.

2) Чтобы узнать, на каком месте от начала списка стоит слово ОМАРОН, нужно выполнить все вышеуказанные действия в обратном порядке.

• Искомое слово ОМАРОН переписываем в виде шестизначного пятеричного числа в соответствии с обозначениями цифр буквами: ОМАРОН → 024103_5.

• Определяем десятичное значение этого пятеричного числа:

$024103_5 = 2*5^4 + 4*5^3 + 1*5^2 + 0*5 + 3 =$
$= 2*625 + 4*125 + 25 + 3 = 1778.$

• Если число нуль стоит на 1-м месте списка, то число 1778 стоит на 1779 месте.

Ответы: 1) ООРАРА, 2) 1779.

Богомолова Ольга Борисовна,
доктор педагогических наук,
почетный работник сферы образования Российской Федерации,
Заслуженный учитель города Москвы, учитель информатики и математики ГБОУ СОШ № 1360, г. Москва,

Усенков Дмитрий Юрьевич,
Московский государственный институт индустрии туризма имени Ю.А. Сенкевича, г. Москва.